

Ondelettes à divergence nulle

Application à la résolution numérique de Navier-Stokes

Erwan Deriaz

Erwan.Deriaz@imag.fr

Équipe Mosaic

Valérie Perrier

Journée de rentrée du LMC 29/09/2005

Objectif

- **Résolution numérique** des équations de Navier-Stokes incompressibles en dimension 2 et 3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} + f \quad t \geq 0, x \in]0, 1[^n \quad n = 2 \text{ ou } 3 \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x) \\ + \text{conditions aux limites (périodiques, Dirichlet homogène ou non homogène)} \end{array} \right.$$

Avec une discrétisation en ondelettes :

$$\mathbf{u}(x, t^n) \approx \mathbf{u}_N(x, t^n) = \sum_{\alpha \in A, \operatorname{Card}(A)=N} c_\alpha^n \Psi_\alpha(x)$$

Et $\Psi_\alpha \in \mathbf{H}_{\operatorname{div},0} = \{ \mathbf{u} \in L^2 / \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \}$.

- **Plan :**

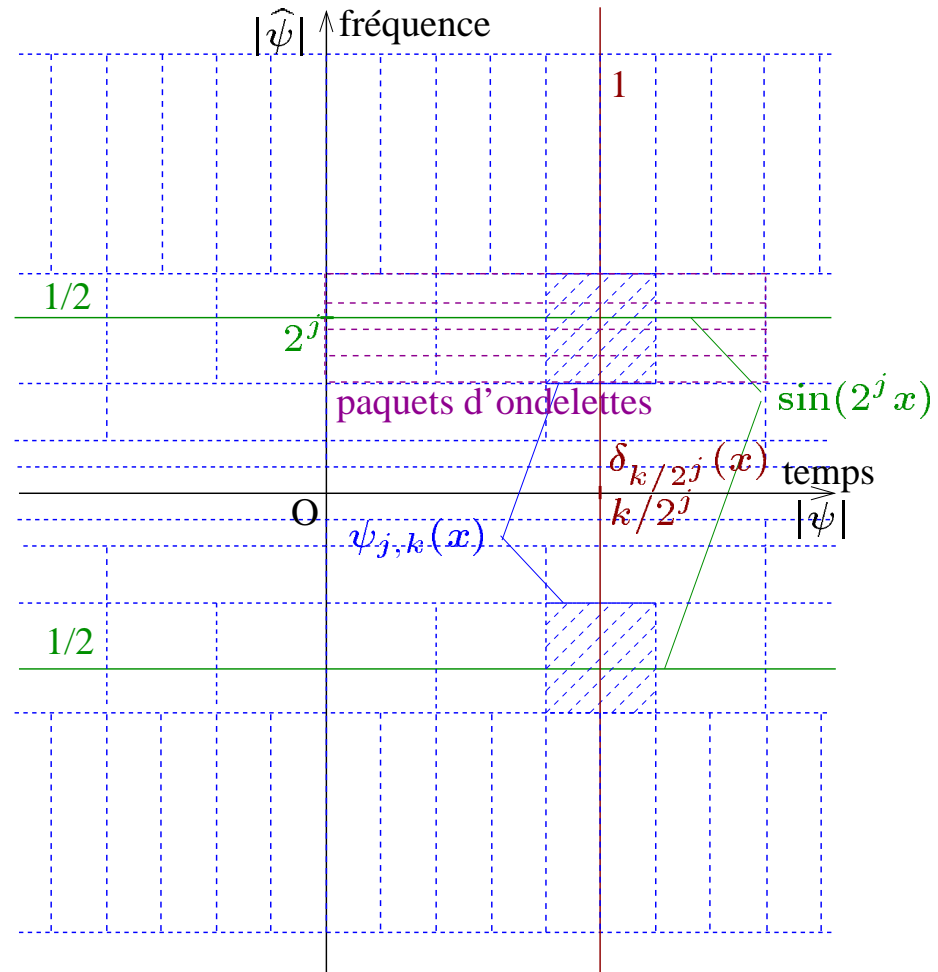
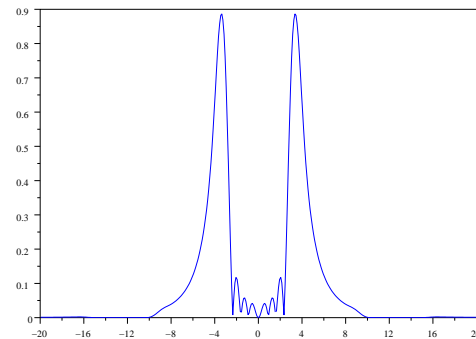
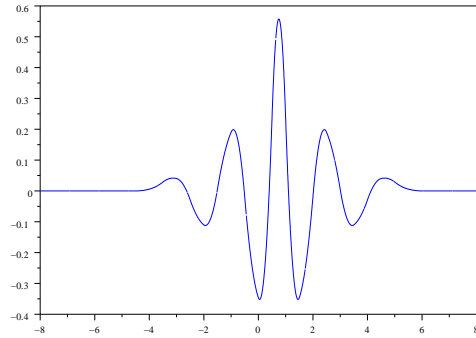
I - Introduction aux ondelettes - Présentation des ondelettes à divergence nulle

II - Ondelettes et extraction de structures cohérentes dans des champs turbulents

III - Schéma numérique Navier-Stokes avec les ondelettes à divergence nulle

Conclusion - Perspectives

I - Introduction aux ondelettes



Répartition temps/fréquence de $\{\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k)/j, k \in \mathbb{Z}\}$

Ondelettes multi-D

- $\{\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k)/j, k \in \mathbb{Z}\}$ base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$
- ondelette de \mathbb{R}^2 issue d'un produit tensoriel d'ondelettes :
 $\psi_{j,k}^1$ et $\psi_{j,k}^2$ ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$, alors
 $\psi_{j_1,k_1}^1(x_1) \psi_{j_2,k_2}^2(x_2)$ ondelette anisotrope ($\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2$) de $L^2(\mathbb{R}^2)$
- les fonctions vectorielles $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ s'écrivent composante par composante :

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} d_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{(i)} \psi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{(i)} \right) \mathbf{e}_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} d_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{(i)} \Psi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{(i)} \right)$$

Ondelettes 2D à divergence nulle anisotropes

Soient ψ_1 et ψ_0 telles que $\psi_1' = 4\psi_0$ [Lem92], on introduit alors :

$$\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 2^{j_2} \psi_1(2^{j_1} x_1 - k_1) \psi_0(2^{j_2} x_2 - k_2) \\ -2^{j_1} \psi_0(2^{j_1} x_1 - k_1) \psi_1(2^{j_2} x_2 - k_2) \end{cases}$$

avec $\mathbf{j} = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$ l'échelle et $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ la position.

La famille $\{\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}} / \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$ forme une base de $H_{\text{div},0}(\mathbb{R}^2)$.

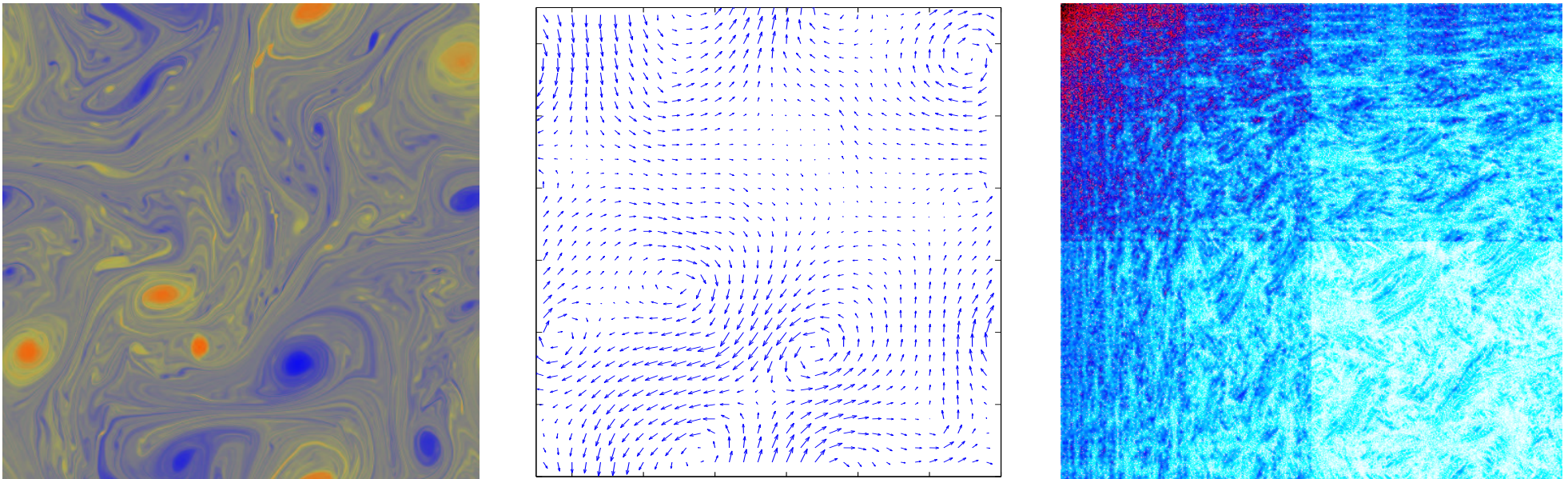
Fonctions complémentaires :

$$\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{n}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 2^{j_1} \psi_1(2^{j_1} x_1 - k_1) \psi_0(2^{j_2} x_2 - k_2) \\ 2^{j_2} \psi_0(2^{j_1} x_1 - k_1) \psi_1(2^{j_2} x_2 - k_2) \end{cases}$$

Remarque : Si on avait $\psi_0' = -4\psi_1$, $\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{n}}$ serait une ondelette gradient.

Mais à ce moment, $\psi_0'' = -16\psi_0$, et ψ_1 et ψ_0 seraient des fonctions trigonométriques (retour à Fourier).

II.1 - Analyse d'un champ de vitesse turbulent 2D



Analyse d'un champ turbulent 2D : champ de vorticité, champ de vitesse associé, coefficients d'ondelettes anisotropes   divergence nulle

II.2 - Extraction de structures cohérentes 3D

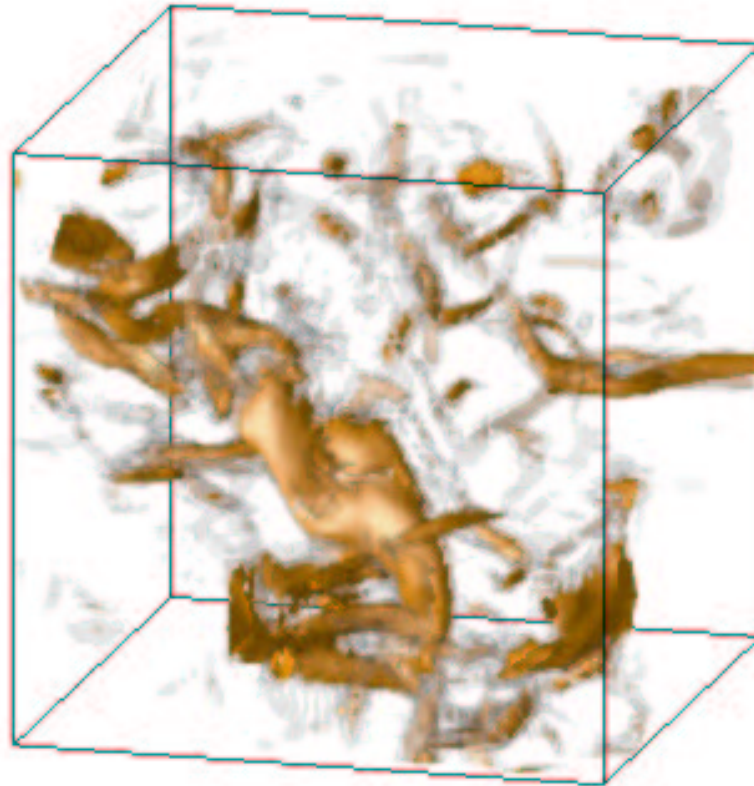
On compare l'efficacité de plusieurs bases d'ondelettes (dont une à divergence nulle) sur un même champ turbulent 3D, en gardant 3% des coefficients.

Critères :

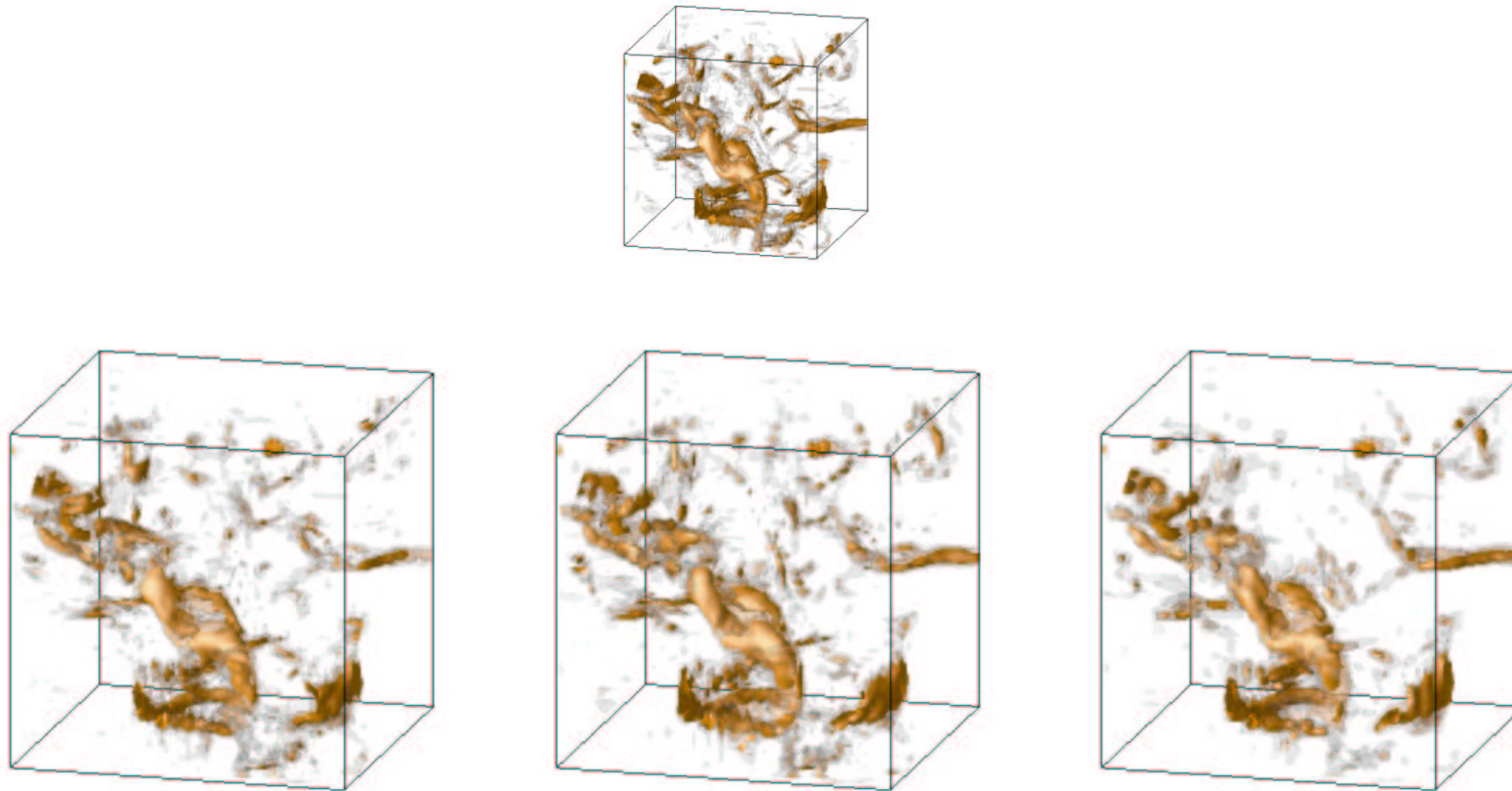
- Erreur sur l'enstrophie :

$$\|\omega_{\text{totale}}\|^2 = \|\omega_{\text{coh}}\|^2 + \|\omega_{\text{incoh}}\|^2 + 2 \langle \omega_{\text{coh}}, \omega_{\text{incoh}} \rangle$$

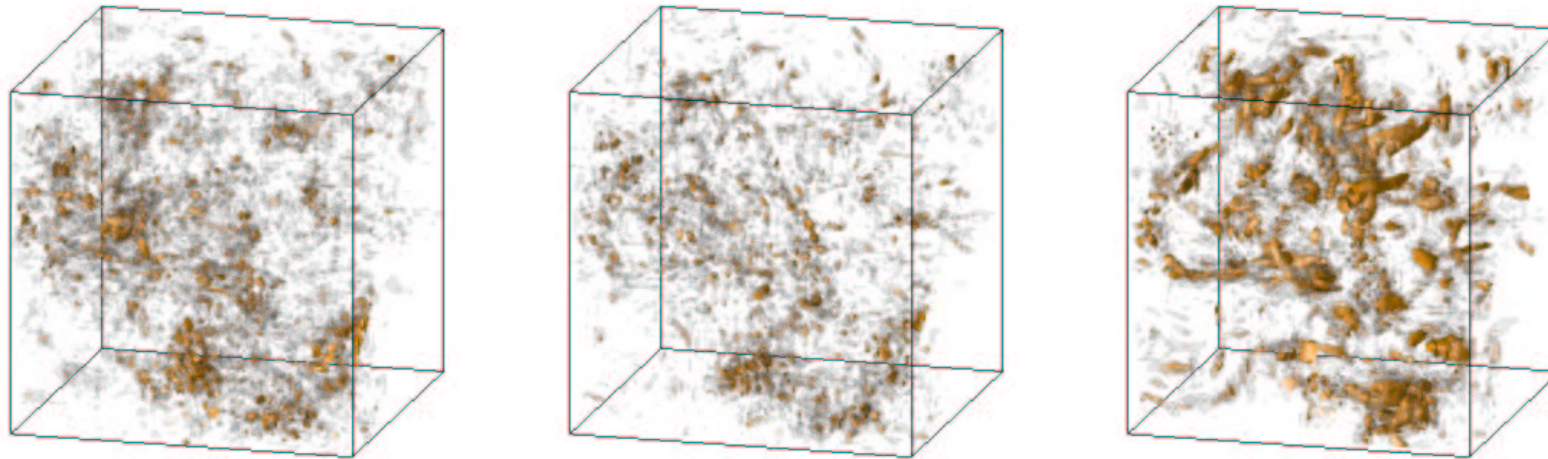
- Erreur sur l'énergie,
- Visualisation des isosurfaces de ω_{totale} , ω_{coh} et ω_{incoh} ,
- Étude du spectre de Fourier pour vérifier la répartition de l'énergie,
- autres critères : PDF de la vorticité, de la vitesse et de l'hélicité relative.



Sous-cube 64^3 d'un champ turbulent 256^3 ($R\lambda=160$) [Meneguzzi (CEMRACS 2005)]. Isosurfaces de la vorticité.



Parties cohérentes extraites grâce aux ondelettes à div nulle (gauche), orthogonales Coifman 12 (centre), et biorthogonales Harten (droite).



Parties incohérentes obtenues avec les ondelettes à div nulle (gauche), orthogonales Coifman 12 (centre), et biorthogonales Harten (droite).

- **Résultats numériques : tables de compression**

Contribution	Totale	Cohérente	Incohérente (erreur)	Corrélation
% coef	100 %	3 %	97 %	
Div. nulle				
Enstrophie (%)	100 %	102.5 %	32.3 %	-34.8 %
Énergie (%)	100 %	99.98 %	0.6 %	-0.6 %
Orthogonales				
Enstrophie (%)	100 %	75.5 %	24.5 %	0 %
Énergie (%)	100 %	99.0 %	0.6 %	0.4 %
Biorthogonales				
Enstrophie (%)	100 %	69.0 %	27.3 %	3.7 %
Énergie (%)	100 %	98.6 %	0.7 %	0.7 %

III.1 - Comparaison Fourier / Helmholtz par ondelettes, pour le projecteur de Leray

Projecteur de Leray en **Fourier** d'une fonction vectorielle

$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sur l'espace $H_{\text{div},0}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions à divergence nulle :

$$\widehat{\mathbb{P}(\mathbf{u})} = \begin{bmatrix} \widehat{u_{\text{div } 1}} \\ \widehat{u_{\text{div } 2}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \widehat{u_{\text{div } n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi_1^2}{|\xi|^2} & -\frac{\xi_2 \xi_1}{|\xi|^2} & \cdots & \cdots & -\frac{\xi_n \xi_1}{|\xi|^2} \\ -\frac{\xi_1 \xi_2}{|\xi|^2} & 1 - \frac{\xi_2^2}{|\xi|^2} & \ddots & \ddots & -\frac{\xi_n \xi_2}{|\xi|^2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\xi_1 \xi_n}{|\xi|^2} & -\frac{\xi_2 \xi_n}{|\xi|^2} & \cdots & -\frac{\xi_{n-1} \xi_n}{|\xi|^2} & 1 - \frac{\xi_n^2}{|\xi|^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{u_1} \\ \widehat{u_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \widehat{u_n} \end{bmatrix}$$

Projecteur oblique en **ondelettes** à div nulle en notant $\xi_i = 2^{j_i}$ et

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} d_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{(i)} \Psi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{(i)} \right) = \sum_{i, \mathbf{j}, \mathbf{k}} d_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{\text{div} (i)} \Psi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{\text{div} (i)} + \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} d_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{\text{n}} \Psi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{\text{n}} \quad :$$

$$\begin{bmatrix} d_{1 \mathbf{j}, \mathbf{k}}^{\text{div}} \\ d_{2 \mathbf{j}, \mathbf{k}}^{\text{div}} \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n \mathbf{j}, \mathbf{k}}^{\text{div}} \\ d_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{\text{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi_1^2}{|\xi|^2} & -\frac{\xi_2 \xi_1}{|\xi|^2} & \cdots & \cdots & -\frac{\xi_n \xi_1}{|\xi|^2} & \frac{\xi_1}{|\xi|} \\ -\frac{\xi_1 \xi_2}{|\xi|^2} & 1 - \frac{\xi_2^2}{|\xi|^2} & \ddots & \ddots & -\frac{\xi_n \xi_2}{|\xi|^2} & \frac{\xi_2}{|\xi|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\xi_1 \xi_n}{|\xi|^2} & -\frac{\xi_2 \xi_n}{|\xi|^2} & \cdots & -\frac{\xi_{n-1} \xi_n}{|\xi|^2} & 1 - \frac{\xi_n^2}{|\xi|^2} & \frac{\xi_n}{|\xi|} \\ \frac{\xi_1}{|\xi|} & \frac{\xi_2}{|\xi|} & \cdots & \frac{\xi_{n-1}}{|\xi|} & \frac{\xi_n}{|\xi|} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1 \mathbf{j}, \mathbf{k}} \\ d_{2 \mathbf{j}, \mathbf{k}} \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n \mathbf{j}, \mathbf{k}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Décomposition de Helmholtz par ondelettes

On veut écrire :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{div}} + \mathbf{v}_{\text{rot}}$$

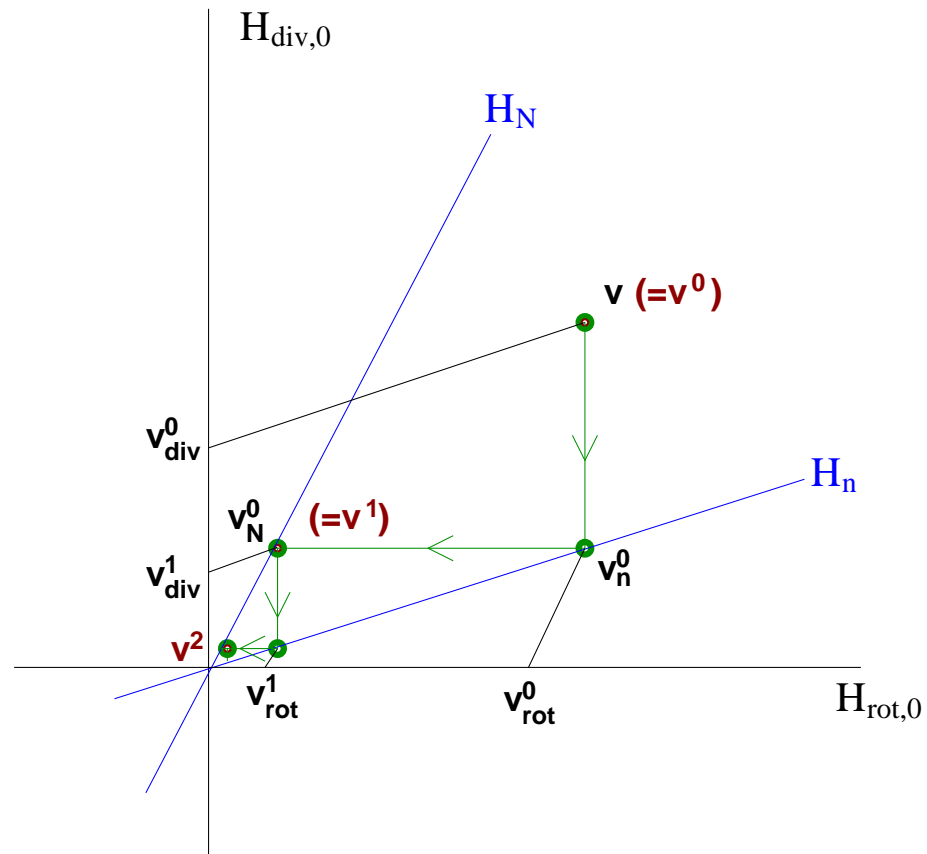
avec

$$\mathbf{v}_{\text{div}} = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d_{\text{div},\mathbf{j},\mathbf{k}} \Psi_{\text{div},\mathbf{j},\mathbf{k}} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_{\text{rot}} = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d_{\text{rot},\mathbf{j},\mathbf{k}} \Psi_{\text{rot},\mathbf{j},\mathbf{k}}$$

Problème : les projecteurs sur les bases d'ondelettes à divergence nulle et sur les bases d'ondelettes gradient sont des projecteurs *biorthogonaux*.

→ Méthode itérative pour trouver \mathbf{v}_{div} et \mathbf{v}_{rot} .

Construction des suites v_{div}^p et v_{rot}^p



Processus de convergence des suites avec $H_N = \text{vect}\{\Psi_{j,k}^N\}$ et $H_n = \text{vect}\{\Psi_{j,k}^n\}$.

Résultat théorique de convergence : Preuve de la convergence en dimension 2 pour ψ_1 une ondelette de Meyer, c'est-à-dire vérifiant

$$\text{supp}(\widehat{\psi}_1) = [-2, -1] \cup [1, 2]$$

Ce résultat est en cours de généralisation en dimension supérieure et avec des ondelettes plus usuelles.

Numériquement, la convergence a été testée avec succès sur des champs variés 2D et 3D.

Problème de la localisation en fréquence des ondelettes

Taux de convergence lié (\sim proportionnel) à :

$$\rho = \iint_{\xi \in \mathbb{R}^2} \frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} \left| \widehat{\psi}_1(\xi_1) \widehat{\psi}_1(\xi_2) \right|^2 d\xi$$

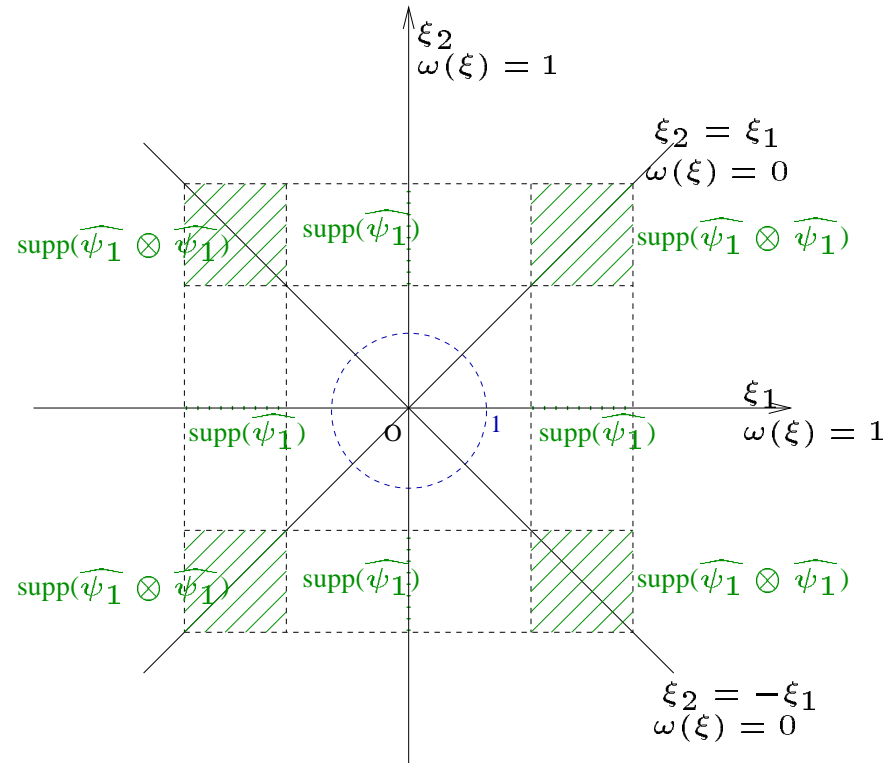
- en Fourier

- fonction poids :

$$\omega(\xi) = \frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}$$

- pavés verts :

$$\left| \widehat{\psi}_1(\xi_1) \widehat{\psi}_1(\xi_2) \right|$$



Conclusion : avoir une **meilleure localisation** en fréquence pour ψ_1 .

III.2 -Schéma numérique

On dispose de :

- un projecteur de Leray par ondelettes \mathbb{P} permettant d'intégrer directement la pression : $\mathbb{P} [(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla p$

- une méthode de calcul du laplacien avec reprojction en $O(N)$

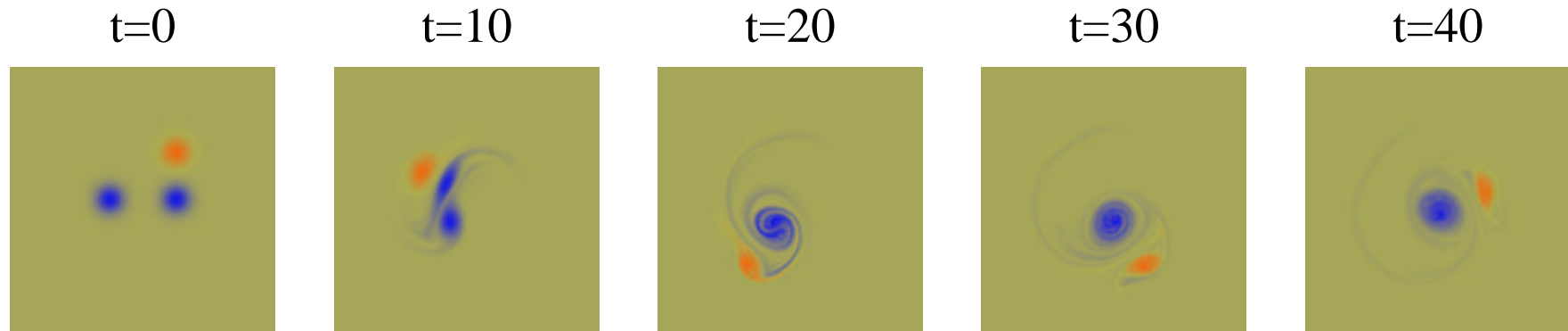
$$\Delta \left(\sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{i=1}^n d_{i\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{\text{div}} \Psi_{i\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{\text{div}} \right) \right) = \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{i=1}^n d_{\Delta i\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{\text{div}} \Psi_{i\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{\text{div}} \right)$$

On est donc en mesure de résoudre numériquement l'équation :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbb{P} [(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] - \nu \Delta \mathbf{u} = 0$$

avec un schéma en temps **explicite** ou **implicite** pour le laplacien.

Test avec la simulation “fusion des 3 tourbillons”



- **code ondelettes** splines de degré 1 et 2 les plus simples (~ 30 itérations pour Helmholtz)
- schéma *Runge-Kutta* d'ordre 2 pour l'évolution temporelle
- grille 256^2

Résultats visuellement identiques à ceux d'un **code spectral** en 256^2 .

Conclusion et perspectives

- Méthode numérique restant à développer.
- Nombreuses possibilités d'optimisation du code.
- Extension 3D : pas de difficulté théorique.
- Extension CL Dirichlet : utilisation des bases d'ondelettes splines biorthogonales sur l'intervalle $[0, 1]$ nulles au bord.
- Extension à l'adaptativité pour la décomposition de Helmholtz : en cours d'étude.