PREPRINT **Vol. ?, 2022, 1-10**
Editors: Will be set by the publisher

CONSTRUCTION DE L'ENSEMBLE DES ENTIERS NATURELS $\mathbb{N}$ BASÉE SUR L'ÉCRITURE DES NOMBRES EN BASE BINAIRE ET SUR DES CONSTRUCTEURS $\{\}_i$

ERWAN DERIAZ[1]

Résumé. Ce très court article présente une construction de l'ensemble des nombres entiers naturels possiblement intéressante en physique. Elle se démarque de celle communément utilisée et mise en avant dans l'ouvrage collectif de N. Bourbaki.

Abstract. This very short paper presents a construction of the set of the natural integers slightly different from the one presented in the joint series of books by N. Bourbaki. It may be of interest for physicists.

Dans l'ouvrage mathématique fondamental N. Bourbaki [1] et dans les ouvrages de mathématiques générales attachés à décrire de façon précise la structure algébrique des ensembles de nombres usuels, les entiers naturels $\mathbb{N}$ sont construits de façon récurrente par addition d'un élément pour passer d'un ensemble à n éléments à un ensemble à $n+1$ éléments. L'on prend cependant le soin de partir de l'ensemble vide $\varnothing$ et d'en considérer l'ensemble des sous-ensembles $\{\varnothing\}$ pour construire les ensembles à zéro et un élément.

Le système usuel est :

$$\begin{array}{ccccccc} \varnothing & \longrightarrow & \{\varnothing\} & \longrightarrow & \{\varnothing\},\{\varnothing\} & \longrightarrow & \{\varnothing\},\{\varnothing\},\{\varnothing\} \quad \text{etc} \\ \text{Card=0} & & \text{Card=1} & & \text{Card=2} & & \text{Card=3} \end{array}$$

ou encore

$$\begin{array}{ccccccc} \varnothing & \longrightarrow & \{\varnothing\} & \longrightarrow & \{\varnothing,\{\varnothing\}\} & \longrightarrow & \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\} \quad \text{etc} \\ \text{Card=0} & & \text{Card=1} & & \text{Card=2} & & \text{Card=3} \end{array}$$

selon que l'on considère des ensembles non ordonnés (les éléments $\{\varnothing\}$ des cas Card≥ 2 sont supposés identiques en essence mais non en nature) ou ordonnés.

L'on propose ici une construction qui paraît originale, basée sur l'extraction des sous-ensembles $\mathcal{P}$ et sur le système binaire où un nombre entier n s'écrit sur une base en puissances de 2 :

$$n = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k 2^k, \quad \text{avec} \quad b_k \in \{0,1\} \quad \text{pour} \quad k \geq 0.$$

L'on a toujours besoin de l'opération de réunion d'ensembles U.

Tous les ensembles à 2^p éléments pour $p \in \mathbb{N}$ se construisent à partir de l'extraction $\mathcal{P}$ et tous les autres par réunions selon l'écriture en base binaire, les constructeurs $\{\}$ doivent être distingués en $\{\}_i$ avec $i \in \mathbb{N}$ selon l'étape binaire. D'où :

$$\begin{array}{ccccccc} \varnothing & \xrightarrow{\mathcal{P}} & \{\varnothing\}_0 & \xrightarrow{\mathcal{P}} & \{\varnothing\}_1, \{\{\varnothing\}_0\}_1 & \xrightarrow{\mathcal{P}} & \{\varnothing\}_2, \{\{\varnothing\}_1\}_2, \{\{\{\varnothing\}_0\}_1\}_2, \{\{\varnothing\}_1, \{\{\varnothing\}_0\}_1\}_2 \\ \text{Card=0} & & \text{Card=1} & & \text{Card=2} & & \text{Card=4} \end{array}$$

---

[1] Institut Jean Lamour, Matériaux-Métallurgie-Nanosciences-Plasmas-Surfaces UMR 7198 - CNRS - Université de Lorraine, Faculté des Sciences et Technologies, Campus Victor Grignard - BP 70239, 54506 VANDOEUVRE-LES-NANCY CEDEX

$$\xrightarrow{U} \quad \{\varnothing\}_0, \{\varnothing\}_1, \{\{\varnothing\}_0\}_1 \qquad \xrightarrow{U} \quad \{\varnothing\}_0, \{\varnothing\}_2, \{\{\varnothing\}_1\}_2, \{\{\{\varnothing\}_0\}_1\}_2, \{\{\varnothing\}_1, \{\{\varnothing\}_0\}_1\}_2 \quad \text{etc}$$

Card=3 (=1U2) Card=5 (=1U4)

Cette construction, outre qu'elle considère bien des éléments tous deux à deux distincts sans les ordonner, donne à voir une organisation riche et variée des différents éléments. L'on ignore à ce jour si cette construction, outre son caractère ludique, est d'une quelconque utilité.

Remerciements Je remercie chaleureusement Serge pour m'avoir initié à la construction bourbakienne des ensembles de nombres usuels en 1996 lors de nos classes préparatoires au Lycée Louis-le-Grand à Paris.

Références

[1] N. Bourbaki, *Livre I, Théorie des ensembles*, Berlin, Hermann, 1970 (réimpr. 1998, 2006) (1ère éd. 1939-1954-1956-1957) livre, 352 p., ISBN 978-3-540-34034-8.