

SCHÉMA NUMÉRIQUE NAVIER-STOKES UTILISANT LES ONDELETTES À DIVERGENCE NULLE

E. DERIAZ * V. PERRIER *

* : Laboratoire de Modélisation et Calcul - IMAG, BP 53, 38041 Grenoble Cedex, France

Erwan.Deriaz@imag.fr

Valerie.Perrier@imag.fr

Introduction

La *simulation des écoulements fluides* reste un domaine très vivant tant sur le plan de l'étude phénoménologique que des schémas numériques résolvant les équations de *Navier-Stokes*. Nous cherchons ici à établir la faisabilité de tels schémas basés sur les **ondelettes à divergence nulle**. Outre le fait de séparer les différentes échelles de l'écoulement, ces ondelettes ont la particularité de former une **base de Riesz** des champs de vecteurs à divergence nulle, ce qui permet la construction de schémas de résolution de type *Galerkin* ou *Petrov-Galerkin*. De telles méthodes soulèvent de nombreux problèmes aussi bien théoriques que numériques. Ce poster présente différents résultats que nous avons obtenus.

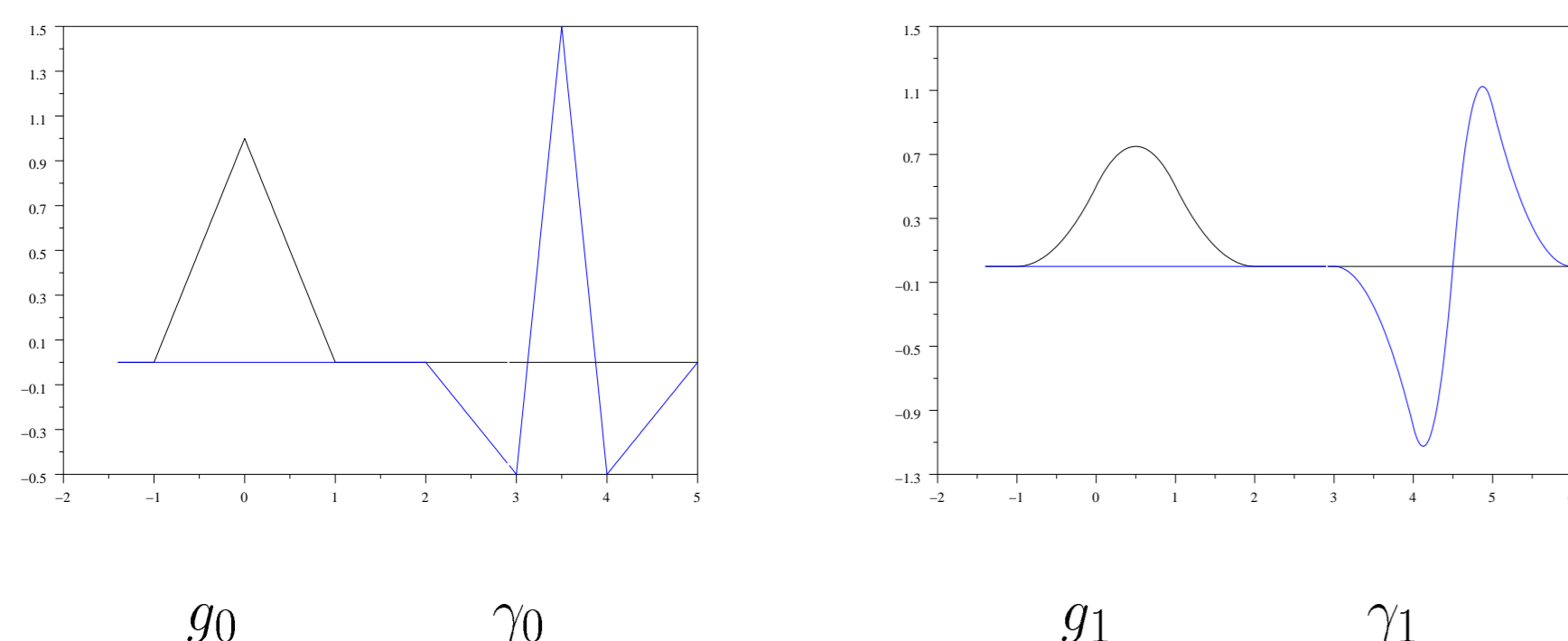
1. Analyses multirésolutions à divergence nulle 2D et 3D et transformées en ondelettes associées

Généralités

La construction standard des ondelettes à divergence nulle dans $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ part de deux *analyses multirésolutions* (AMR) 1D et a été établie dans [6]. Soit (V_j^0) une AMR 1D de fonction d'échelle g_0 et d'ondelette γ_0 , on peut construire une autre AMR 1D (V_j^1) qui vérifie :

$$g_1^1(x) = g_0(x) - g_0(x-1) \\ \gamma_1^1(x) = 4\gamma_0(x)$$

$$V_0^0 = \text{vect}\{g_0(x-k), k \in \mathbb{Z}\} \quad V_1^1 = \text{vect}\{g_1(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$$



Les ondelettes vecteurs à divergence nulle sont ensuite obtenues comme *produits tensoriels et combinaisons linéaires* de ces fonctions.

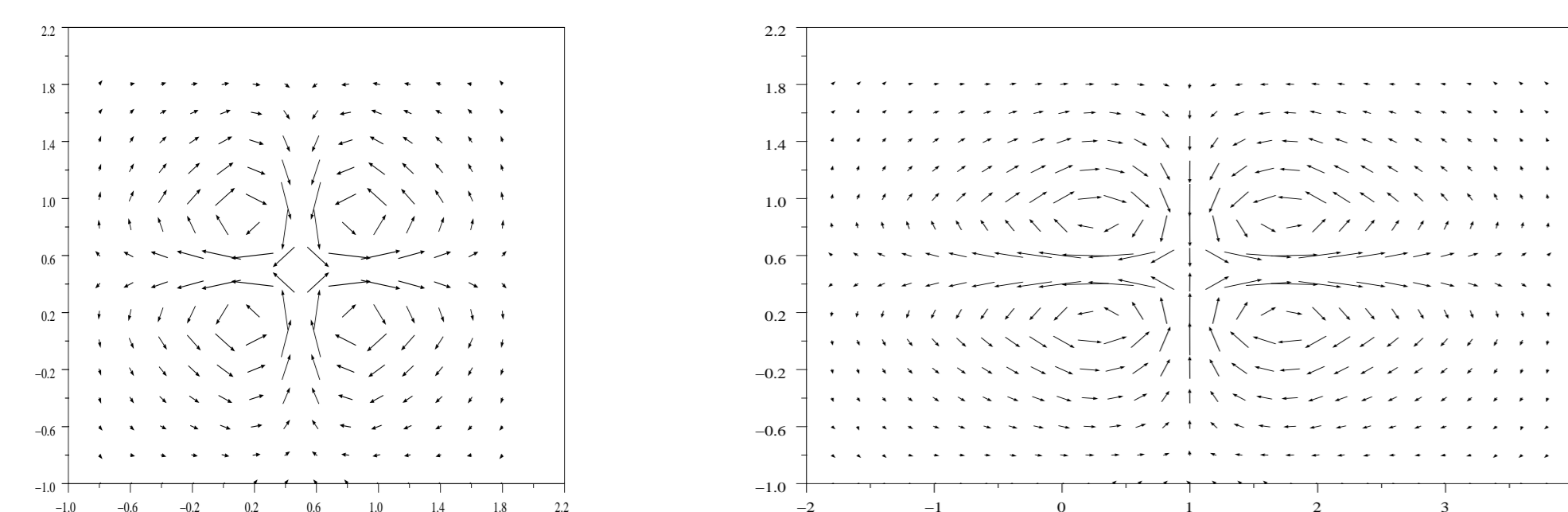
Ondelettes vecteurs à divergence nulle anisotropes

Pour les définir, on utilise les fonctions introduites ci-dessus. Ainsi en 2D, on obtient :

$$\vec{\Psi}_{\text{div},(j_1,j_2),(k_1,k_2)}(x_1,x_2) = \begin{cases} 2^{j_2}\gamma_1(2^{j_1}x_1-k_1)\gamma_0(2^{j_2}x_2-k_2) \\ -2^{j_1}\gamma_0(2^{j_1}x_1-k_1)\gamma_1(2^{j_2}x_2-k_2) \end{cases}$$

Graphiquement, ces ondelettes vecteurs sont obtenues par *translations et dilatations anisotropes* d'une seule et même ondelette vecteur $\vec{\Psi}_{\text{div}}$.

$$\vec{\Psi}_{\text{div}}(x_1,x_2) \quad \vec{\Psi}_{\text{div}}\left(\frac{x_1}{2},x_2\right)$$



Transformée en ondelettes à divergence nulle

Cette transformée ne se fait pas de façon directe à partir de fonctions d'échelle à divergence nulle (ce qui serait plus facile mais ne permettrait pas de saisir ce qui se passe lorsque le champ initial n'est pas à divergence nulle). Elle se compose d'une transformée classique en ondelettes tensorielles (en 2D ce sera $(V_j^0 \otimes V_j^1, V_j^1 \otimes V_j^0)$), suivie d'un changement de base aisément calculable. Schématiquement, en 2D cela donne :

$$(V_j^1 \otimes V_j^0) \times (V_j^0 \otimes V_j^1) \rightarrow (W_{j_1}^1 \otimes W_{j_2}^0) \times (W_{j_1}^0 \otimes W_{j_2}^1) \begin{cases} \nearrow \vec{W}_{(j_1,j_2)}^{\text{div}} \subset \vec{H}^{\text{div}} \\ \oplus \\ \searrow \vec{W}_{(j_1,j_2)}^{\text{n}} \end{cases}$$

où $\vec{W}_{j_1,j_2}^{\text{n}}$ est un **espace complémentaire** dont le choix est crucial dans le cas d'une *décomposition de Hodge* d'un champ compressible. Idéalement, il devrait être orthogonal à \vec{H}^{div} c'est-à-dire dériver d'un *gradient* ($W_j^{\text{n}} = \vec{\nabla}(H^1(\mathbb{R}^2))$). Bien que nos recherches en ce sens n'aient pas abouti, nous

avons choisi quelque chose d'approchant, une analyse multirésolution formée des fonctions :

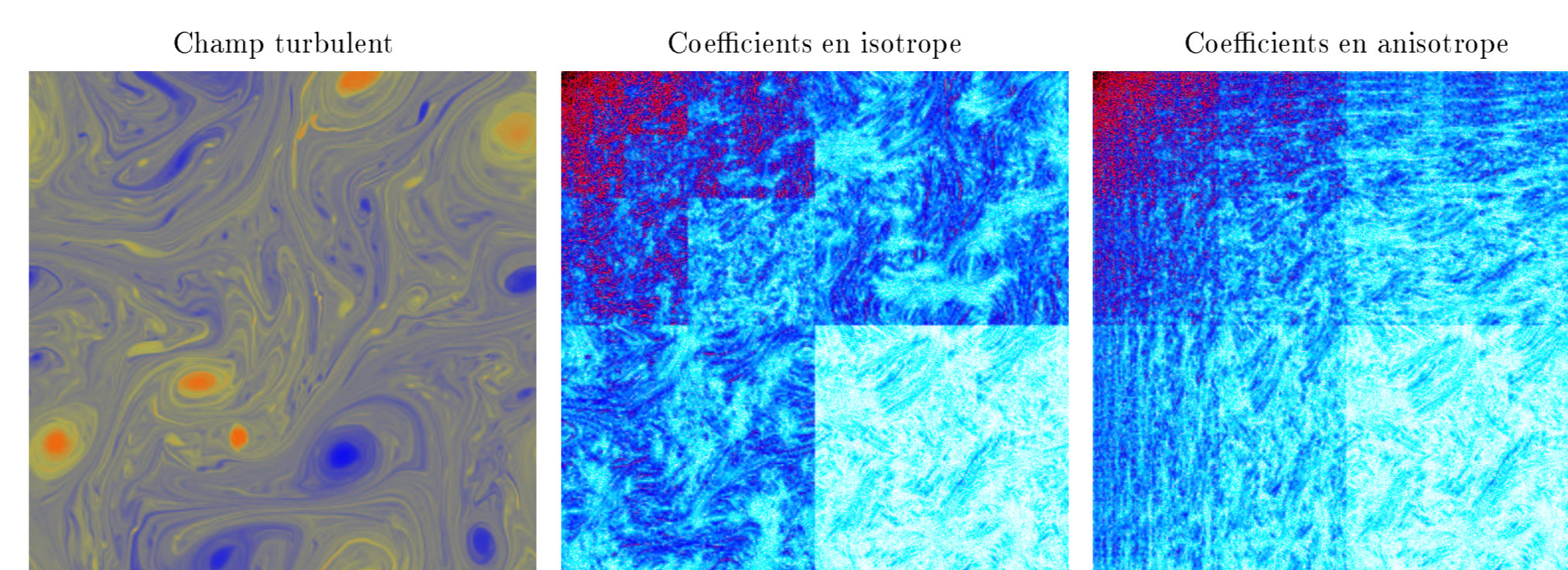
$$\vec{\Psi}_{\text{n},\mathbf{j},\mathbf{k}}(x_1,x_2) = \begin{cases} 2^{j_1}\gamma_1(2^{j_1}x_1-k_1)\gamma_0(2^{j_2}x_2-k_2) \\ 2^{j_2}\gamma_0(2^{j_1}x_1-k_1)\gamma_1(2^{j_2}x_2-k_2) \end{cases}$$

Alors la transformée en ondelettes habituelle :

$$\vec{u}(x_1,x_2) = \begin{cases} \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} d_{1,\mathbf{j},\mathbf{k}} \gamma_1(2^{j_1}x_1-k_1) \gamma_0(2^{j_2}x_2-k_2) \\ \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} d_{2,\mathbf{j},\mathbf{k}} \gamma_0(2^{j_1}x_1-k_1) \gamma_1(2^{j_2}x_2-k_2) \end{cases}$$

par un **changement de base**, devient

$$\vec{u} = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{2^{j_2}}{2^{2j_1+2j_2}} d_{1,\mathbf{j},\mathbf{k}} - \frac{2^{j_1}}{2^{2j_1+2j_2}} d_{2,\mathbf{j},\mathbf{k}} \right) \vec{\Psi}_{\text{div},\mathbf{j},\mathbf{k}} \\ + \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{2^{j_1}}{2^{2j_1+2j_2}} d_{1,\mathbf{j},\mathbf{k}} + \frac{2^{j_2}}{2^{2j_1+2j_2}} d_{2,\mathbf{j},\mathbf{k}} \right) \vec{\Psi}_{\text{n},\mathbf{j},\mathbf{k}}$$



Champ de vorticité 1024×1024 issu de [5] avec ses transformées en ondelettes isotropes et anisotropes

Le cas 3D

Le cas 3D se traite de façon similaire au cas 2D. Il faut d'abord choisir 2 ondelettes vecteurs parmi les 3 suivantes :

$$\vec{\Psi}_{\text{div},1,\mathbf{j},\mathbf{k}}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 2^{j_2}\gamma_1(2^{j_1}x_1-k_1)\gamma_0(2^{j_2}x_2-k_2)\gamma_0(2^{j_3}x_3-k_3) \\ -2^{j_1}\gamma_0(2^{j_1}x_1-k_1)\gamma_1(2^{j_2}x_2-k_2)\gamma_0(2^{j_3}x_3-k_3) \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{\Psi}_{\text{div},2,\mathbf{j},\mathbf{k}}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 0 \\ 2^{j_3}\gamma_0(2^{j_1}x_1-k_1)\gamma_1(2^{j_2}x_2-k_2)\gamma_0(2^{j_3}x_3-k_3) \\ -2^{j_2}\gamma_0(2^{j_1}x_1-k_1)\gamma_0(2^{j_2}x_2-k_2)\gamma_1(2^{j_3}x_3-k_3) \end{cases}$$

$$\vec{\Psi}_{\text{div},3,\mathbf{j},\mathbf{k}}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} -2^{j_3}\gamma_1(2^{j_1}x_1-k_1)\gamma_0(2^{j_2}x_2-k_2)\gamma_0(2^{j_3}x_3-k_3) \\ 0 \\ 2^{j_1}\gamma_0(2^{j_1}x_1-k_1)\gamma_0(2^{j_2}x_2-k_2)\gamma_1(2^{j_3}x_3-k_3) \end{cases}$$

avec $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3)$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3$. Le complémentaire étant :

$$\vec{\Psi}_{\text{n},\mathbf{j},\mathbf{k}}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 2^{j_1}\gamma_1(2^{j_1}x_1-k_1)\gamma_0(2^{j_2}x_2-k_2)\gamma_0(2^{j_3}x_3-k_3) \\ 2^{j_2}\gamma_0(2^{j_1}x_1-k_1)\gamma_1(2^{j_2}x_2-k_2)\gamma_0(2^{j_3}x_3-k_3) \\ 2^{j_3}\gamma_0(2^{j_1}x_1-k_1)\gamma_0(2^{j_2}x_2-k_2)\gamma_1(2^{j_3}x_3-k_3) \end{cases}$$

2. Application à la décomposition de Hodge

L'espace des fonctions de (\mathbb{R}^n) dans (\mathbb{R}^n) se décompose en somme orthogonale des espaces des *fonctions à divergence nulle* et des *fonctions gradients* :

$$(L^2(\mathbb{R}^n))^n = \vec{H}^{\text{div}}(\mathbb{R}^n) \oplus^\perp \vec{H}^{\text{rot}}(\mathbb{R}^n)$$

La **décomposition de Hodge** d'un champ de vitesse compressible \mathbf{u} s'écrit donc :

$$\vec{u} = \vec{u}_{\text{div}} + \vec{\nabla}p \quad \text{and} \quad \vec{u}_{\text{div}} = \text{rot} \psi$$

Algorithme

On décompose récursivement et alternativement \vec{u} dans une *base d'ondelettes à divergence nulle* et dans une *base d'ondelettes gradients* $\vec{\Psi}_{\text{rot},\mathbf{j},\mathbf{k}}$. En extrayant à chaque fois les coefficients $d_{\text{div},\mathbf{j},\mathbf{k}}^p$ et $d_{\text{rot},\mathbf{j},\mathbf{k}}^p$, ce qui donne :

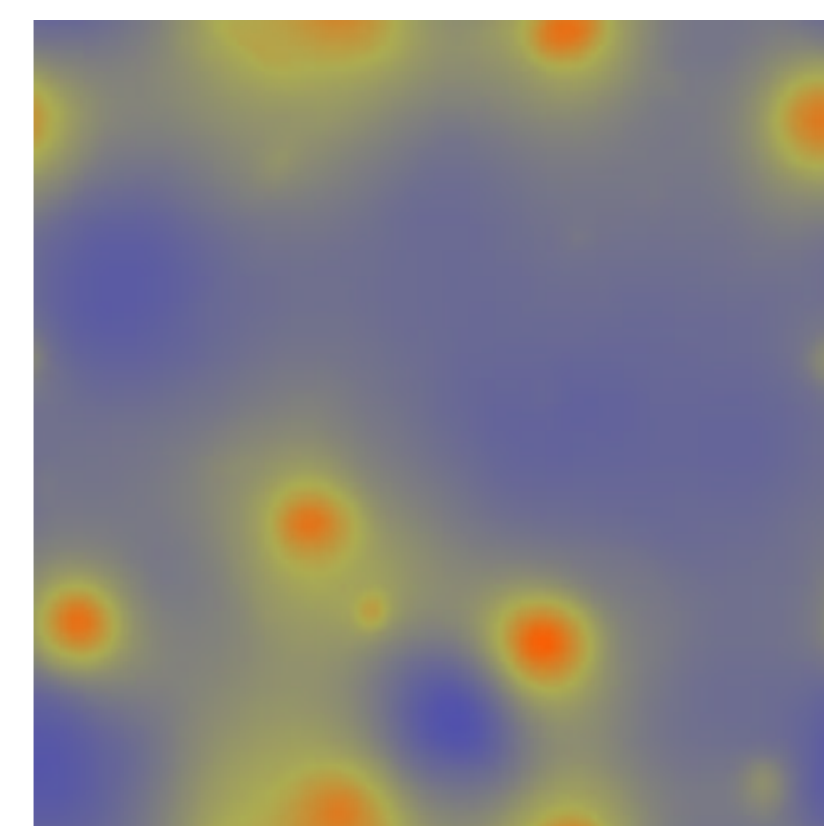
$$\vec{u} = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} d_{\text{div},\mathbf{j},\mathbf{k}}^p \right) \vec{\Psi}_{\text{div},\mathbf{j},\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} d_{\text{rot},\mathbf{j},\mathbf{k}}^p \right) \vec{\Psi}_{\text{rot},\mathbf{j},\mathbf{k}}$$

Application au calcul de la pression d'un champs turbulent

Comme les *ondelettes gradients* dérivent d'une base d'*ondelettes scalaires*,

$$\vec{\Psi}_{\text{rot},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \vec{\nabla}\psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$$

elles s'intègrent de façon immédiate permettant ainsi de retrouver la fonction pression dont dérive la partie compressible. Si on applique cet algorithme au terme non linéaire $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ du champ turbulent 2D ci-dessus, on obtient le **champ de pression** ci-contre.



3. Schéma numérique pour Navier-Stokes

Algorithme

En utilisant la projection \mathbb{P} du *terme non linéaire* $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ sur les ondelettes à divergence nulle définie au paragraphe précédent, et en appliquant un schéma en espace de *Petrov-Galerkin* au terme de diffusion, on peut faire tourner un modèle numérique :

$$\partial_t \vec{u} = -\mathbb{P}((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}) + \nu \Delta \vec{u}$$

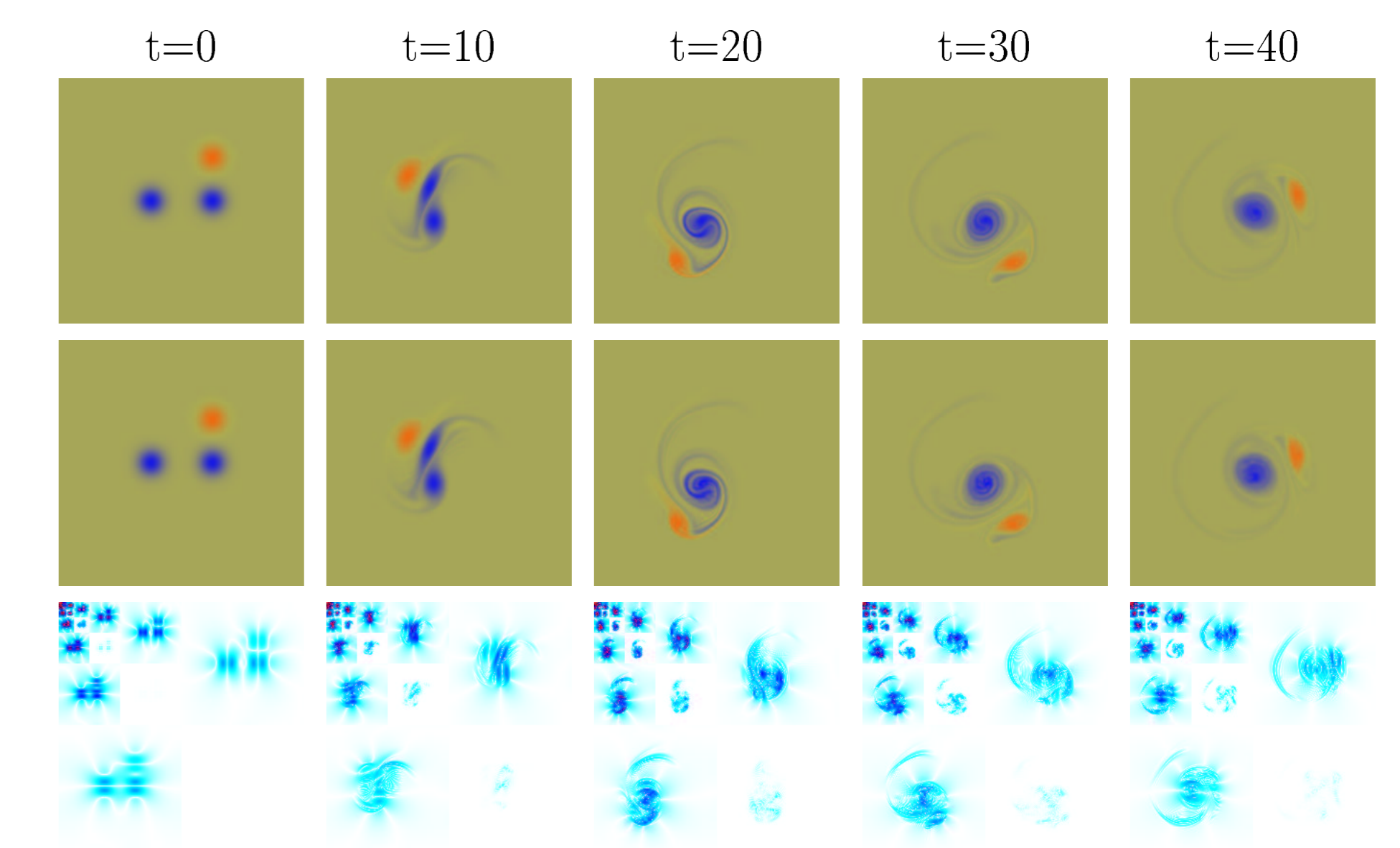
exprimé sur les coefficients des ondelettes à divergence nulle $\mathbf{D} = (d_{\text{div},\mathbf{j},\mathbf{k}})$:

$$\partial_t \mathbf{D} = -\mathbb{P}(\text{TN}(\vec{u})) + \nu M_{\Delta} \mathbf{D}$$

Et la **pression** se déduit directement grâce aux ondelettes $\vec{\Psi}_{\text{rot},\mathbf{j},\mathbf{k}}$.

Résultats numériques

Par un simple schéma *Runge-Kutta* d'ordre 2 pour l'évolution temporelle, on obtient alors des résultats comparables à ceux d'un code pseudo-spectral pour l'expérience de la **fusion de 3 tourbillons**. Ci-dessous, la même expérience, réalisée en *code pseudo-spectral* en 512^2 puis en *code ondelettes* en 256^2 avec les décompositions en *ondelettes isotropes*.



Conclusion, perspectives

Malgré des temps de calcul nettement plus longs qu'en schéma spectral, ces résultats constituent des premiers pas encourageants et ouvrent de multiples voies. Des tests plus approfondis seront menés pour faire des comparaisons avec des solutions de référence dans différentes configurations (*turbulence forcée, conditions aux limites non périodiques...*). De plus, cette méthode s'étend de façon immédiate à la *dimension 3 d'espace* et peut être naturellement munie d'une *adaptativité dynamique*. Un autre aspect très intéressant des ondelettes, est que, comme elles induisent une bonne *séparation espace/fréquence*, elles sont tout désignées pour une **approche LES** des écoulements turbulents [3].

Remerciements : Ce travail est soutenu en partie par le projet européen *Breaking complexity* HPRN-CT-2002-00286.

References

- [1] C.-M. Albukrek, K. Urban, D. Rempfer, and J.-L. Lumley. *Divergence-Free Wavelet Analysis of Turbulent Flows*, J. of Scientific Computing **17**(1): 49-66, 2002.
- [2] E. Deriaz, V. Perrier. *Towards a divergence-free wavelet method for the simulation of 2D/3D turbulent flows*, soumis à Journal of Turbulence, 2004.
- [3] M. Farge and K. Schneider. *Coherent Vortex Simulation (CVS), A Semi-Deterministic Turbulence Model Using Wavelets*, Flow, Turbulence and Combustion, **66**: 393-426, 2001.
- [4] B.L. Hua and D. Haidvogel. *Numerical simulations of the vertical structure of quasi-geostrophic turbulence*, J. Atmos. Sci. **3**:2923-2936, 1986.
- [5] G. Lapeyre. *Topologie de mélange dans un fluide turbulent géophysique*, Thèse de doctorat de l'Université Paris VI, 2000.
- [6] P.-G. Lemarié-Rieusset. *Analyses multi-résolutions non orthogonales, commutation entre projecteurs et dérivation et ondelettes vecteurs à divergence nulle*, Revista Matemática Iberoamericana, **8**(2): 221-236, 1992.
- [7] K. Urban. *Using divergence free wavelets for the numerical solution of the Stokes problem*, AMLI'96: Proceedings of the Conference on Algebraic Multilevel Iteration Methods with Applications, **2**: 261-277, University of Nijmegen, The Netherlands, 1996.
- [8] K. Urban. *Wavelet Bases in $H(\text{div})$ and $H(\text{curl})$* , Mathematics of Computation **70**, Number 234, Pages 739-766, 2000.